УДК 51(071)

Л.П. Мироненко[1], И.В. Петренко[1,2], О.А. Рубцова[1]
[1]Донецкий национальный технический университет, Украина
mirleonid@telenet.dn.ua
[2]Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина

Интегральные теоремы о среднем. Подход, основанный на свойствах интегральной меры

В статье рассмотрены первая и вторая интегральные теоремы о среднем и их обобщения, известные под названием обобщенных теорем. Показано, что при определенных свойствах подынтегральной функции теорема Лагранжа в интегральной форме совпадает с первой интегральной теоремой о среднем. Доказательство второй теоремы о среднем основывается на геометрических соображениях. Основным результатом является простота и изящество доказательств интегральных теорем о среднем по сравнению с традиционным способом, а во второй теореме – даже при меньших ограничениях.

Введение

Как известно, теорема Лагранжа, которую часто еще называют формулой конечных приращений Лагранжа, относится к так называемым теоремам о среднем в интегральном исчислении, широко используется в дифференциальном и интегральном исчислениях для доказательства ряда математических положений [1-3]. Если говорить о математической значимости теоремы, то она устанавливает связь между производной функции (т.е. между предельным переходом отношения бесконечно малых) и конечными приращениями аргумента и функции. Иначе говоря, она устанавливает переход от конечных величин к бесконечно малым и наоборот. Этот феномен позволяет легко переходить от элементарной математики к математическому анализу и обратно, что, в свою очередь, позволяет легко выводить и доказывать ряд математических положений. Например, используя теорему Лагранжа, легко выводится правило Лопиталя, устанавливается остаточный член в формуле Тейлора, доказывается равенство смешанных вторых производных функции двух переменных и пр.

Вводя интегральный аналог теоремы Лагранжа, можно сразу получить первую теорему о среднем в интегральном исчислении; вывести и доказать ряд фундаментальных положений математического анализа, таких, как формула Ньютона – Лейбница; доказать ряд свойств определенного интеграла, не прибегая к понятию интегральной суммы; доказать теоремы о среднем в интегральном исчислении [4]. В дальнейшем понадобится понятие и свойства интегральной меры. *Свойства меры μE измеримого множества E:*

1. Неотрицательность: $\mu E \ge 0$.

2. Монотонность: если $E_1 \subset E_2$, то $\mu E_1 < \mu E_2$.

3. Аддитивность: если $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \ne j = 1,2,...,m,$ то $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu E_i$.

1 Теоремы о среднем

Напомним содержание теоремы Лагранжа в дифференциальном исчислении. Если функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), то существует точка $\xi \in (a,b)$, такая, что имеет место формула

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a) \ . \tag{1}$$

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то, учитывая формулу Ньютона – Лейбница $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ и $F'(\xi)=f(\xi)$, получим формулу

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \tag{2}$$

которую можно рассматривать как интегральный аналог формулы Лагранжа (1). Обратим внимание на то, что функция $f(x)$ должна быть непрерывной на отрезке $[a,b]$. Кроме того, поскольку $\xi \in (a,b)$, то $m \le f(x) \le M$, где M и m максимум и минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Так что $m \le f(\xi) \le M$.

Геометрический смысл формулы для неотрицательной функции $f(x)$ означает, что всегда найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что площадь криволинейной трапеции, выражаемой величиной интеграла, равна площади прямоугольника основанием $(b-a)$ и высотой $f(\xi)$. Это утверждение хорошо известно в анализе под названием первой теоремы о среднем [1-3].

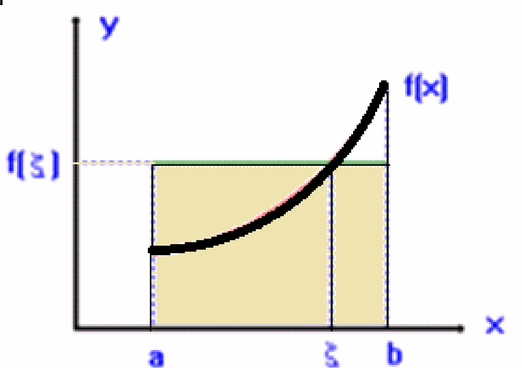


Рисунок 1 – Геометрическая иллюстрация первой теоремы о среднем

В обобщенном виде первая теорема о среднем формулируется так.

Первая теорема о среднем. Пусть: функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ имеет первообразную $G(x)$ и не меняет знак на $[a,b]$ рис. 1. Тогда существует точка $\xi \in (a,b)$, такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \ . \tag{3}$$

В случае лишь интегрируемости функции $f(x)$ на $[a,b], \exists \mu, m \le \mu \le M$, что в теореме $f(\xi)=\mu$.

Следствие. При $g(x)=1$ на $[a,b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Применим интегральную теорему Лагранжа к функции $f(x)$, переписав ее в виде $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b dx$. Произведем замену интегральной меры $dx \to \mu E = dG(x)$. Обратим внимание на то, что интегральная мера $dG(x) = G'(x)dx = g(x)dx$ не меняет знак на отрезке $[a,b]$, если функция $g(x)$ будет знакопостоянной на $[a,b]$. В результате получим:

$$\int_a^b f(x)dG(x) = f(\xi)\cdot\int_a^b dG(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)G'(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b G'(x)dx.$$

Учитывая, что $dG(x) = G'(x)dx = g(x)dx$, окончательно имеем формулу (3).

Замечание. Условие теоремы о знакопостоянстве функции $g(x)$ требуется для того, чтобы интегральная мера $\mu E = dG(x)$ была неотрицательной, т.к. $dG(x) \geq 0 \Rightarrow g(x)dx \geq 0$. Учитывая, что $dx > 0$, следовательно, функция $g(x)$ должна быть знакопостоянной.

Вторая теорема о среднем. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$, функция $f(x)$ знакопостоянна на $[a,b]$, а функция $g(x)$ монотонна на $[a,b]$ (рис. 2). Тогда существует точка $\xi \in (a,b)$, такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \quad (4)$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем аналогично тому, как это было сделано в первой теореме о среднем. Сначала рассмотрим частный случай. При $f(x) = 1$ формула (4) очевидна из геометрических соображений.

$$\int_a^b g(x)dx = g(a)(\xi - a) + g(b)(b - \xi). \quad (5)$$

Из формулы видно, функция $g(x)$ должна быть непрерывной и монотонной.

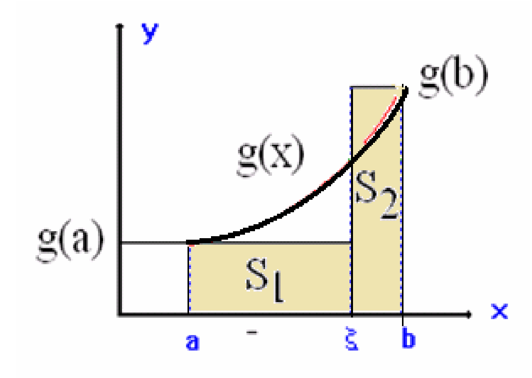


Рисунок 2 – Геометрическая иллюстрация второй теоремы о среднем

В силу свойств функции $g(x)$ найдется точка $\xi \in [a,b]$, что интеграл $\int_a^b g(x)dx$ равен сумме площадей двух прямоугольников высотой $g(a)$ и $g(b)$ основаниями $(\xi - a)$ и $(b - \xi)$.

$$\int_a^b g(x)dx = S_1 + S_2.$$

Перепишем равенство в виде $\int_a^b g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} dx + g(b)\int_{\xi}^b dx,$ и обобщим его для интегральной меры $\mu E = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

$$\int_a^b g(x)dF(x) = g(a)\int_a^{\xi} dF(x) + g(b)\int_{\xi}^b dF(x),$$

откуда следует теорема.

Замечание. В стандартном курсе математического анализа доказательство формулы (4) требует непрерывной дифференцируемости функции $g(x)$ и ее монотонности. Из предложенного варианта доказательства следует, что теорема остается справедливой и при более слабых ограничениях – интегрируемости $f(x)$ и непрерывности и монотонности $g(x)$.

2 Некоторые применения теорем о среднем

Параметризуем дугу L ее длиной $s \in [0, L]$. Пусть вдоль дуги L непрерывно распределено вещество. Выделим в точке $P_i(x, y, z)$ элементарный участок дуги Δs_i массой Δm_i. Предел $\lim\limits_{\Delta s_i \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta s_i} = \rho(x, y, z)$ называется линейной плотностью вещества в точке $P(x, y, z)$. Очевидно, что элемент массы $\Delta m_i = \rho(P_i)\Delta s_i$. Определим элементарные **статические моменты** $\Delta M_i^x, \Delta M_i^y$ элементов массы дуги Δm_i относительно осей x и y соответственно равенствами $y_i \cdot \Delta m_i$ и $x_i \cdot \Delta m_i$ или $x_i \cdot \rho(P_i)\Delta s_i$ и $y_i \cdot \rho(P_i)\Delta s_i$.

Статические моменты M^x, M^y дуги относительно осей x и y получаются в результате предельного перехода по S

$$M^x = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i) y(s_i) \Delta s_i = \int_0^L \rho(s) y(s) ds, \quad M^y = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i) x(s_i) \Delta s_i = \int_0^L \rho(s) x(s) ds. \quad (6)$$

Применим к этим формулам первую теорему о среднем

$$M^x = y(s_o)\int_0^L \rho(s)ds, \quad M^y = x(s_o)\int_0^L \rho(s)ds.$$

Обозначим $x(s_o) = x_o$, $y(s_o) = y_o$ и запишем определения (6) в виде

$$x_o \int_0^L \rho(s)ds = \int_0^L \rho(s)x(s)ds, \quad \int_0^L \rho(s)y(s)ds = y_o \int_0^L \rho(s)ds.$$

Поскольку интеграл $\int_0^L \rho(s)y(s)ds$ равен массе m дуги, то точка $N(x_o, y_o)$ с координатами x_o, y_o означает центр тяжести дуги

$$x_o = \frac{\int_0^L \rho(s)x(s)ds}{\int_0^L \rho(s)ds}, \quad y_o = \frac{\int_0^L \rho(s)y(s)ds}{\int_0^L \rho(s)ds}. \quad (7)$$

Так, естественным путем возникает следующее определение.

Определение. Центром тяжести дуги называется точка $N(x_o, y_o)$, в которой $M^x = my_o$, $M^y = mx_o$, т.е. если в эту точку поместить материальную точку с массой m, равной массе дуги, то точка $N(x_o, y_o)$ имеет статический момент, равный статическому моменту всей дуги.

Подставим в формулу (7) $\int_0^L \rho(s)ds = m$ и получим

$$x_o = \frac{1}{m}\int_0^L \rho(s)x(s)ds,\ y_o = \frac{1}{m}\int_0^L \rho(s)y(s)ds .$$

В частности, при $\rho = const$, имеем $m = \rho L$ и

$$x_o = \frac{1}{L}\int_0^L x(s)ds,\ y_o = \frac{1}{L}\int_0^L y(s)ds . \qquad (8)$$

Аналогично рассматриваются понятия центра тяжести для плоских фигур и тел.

Пусть в некотором объеме V распределено непрерывно вещество. Выделим в точке $P_i(x, y, z)$ элементарный объем $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ массой Δm_i. Предел $\lim\limits_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} = \rho(x, y, z)$ называется объемной плотностью вещества в точке $P(x, y, z)$. Очевидно, что элемент массы $\Delta m_i = \rho(P_i)\Delta V_i$. Просуммируем это выражение по всему объему V и перейдем к пределу $\Delta V_i \to 0$, получим массу тела $M = \lim\limits_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz$.

Статический момент тела V относительно любой пары осей, например, осей Ox и Oy определяется как

$$S_{xy} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i = \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz .$$

Применим первую теорему о среднем

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz = z_o \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz = z_o M ,$$

запишем определения (6) в виде

$$\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz = z_o \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz \Rightarrow z_o = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz}.$$

Определение. Точкой центра тяжести $M_0(x_0, y_0, z_0)$ тела V называется точка, в которой статические моменты относительно координатных осей равны соответствующим статическим моментам тела V. Другими словами, $Mx_0 = S_{yz}$, $My_0 = S_{xz}$, $Mz_0 = S_{xy}$.

Откуда следует

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz},\ y_0 = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz},\ z_0 = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz}.$$

Полученные формулы справедливы для плоских фигур D:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x, y)dxdy},\ y_0 = \frac{\iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x, y)dxdy}.$$

Здесь $\rho(x,y)=\lim\limits_{\Delta S_i\to 0}\dfrac{\Delta m_i}{\Delta S_i}$ – поверхностная плотность массы в области D, $M=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ – масса плоской фигуры D.

Рассмотрим формулу для площади поверхности тела, полученного вращением графика $y=y(x),\ \ y>0$ вокруг оси Ox $S=2\pi\int\limits_{r_a}^{r_b} y(t)\left|d\vec{r}(t)\right|$. Применим к формуле первую теорему о среднем $S=2\pi y(t_o)\int\limits_{r_a}^{r_b}\left|d\vec{r}(t)\right|$. Учтем, что $\int\limits_{r_a}^{r_b}\left|d\vec{r}(t)\right|=L,$ имеем $S=2\pi y_o L$. В результате приходим к теореме **Гульдина**: *площадь S поверхности, полученная от вращения дуги вокруг некоторой оси, равна длине этой дуги L, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой дуги* $S=2\pi y_o L$.

Заключение

В работе показана связь между первой теоремой о среднем и теоремой Лагранжа в интегральной форме. Установлено, что при определенных свойствах подынтегральной функции теорема Лагранжа в интегральной форме совпадает с первой теоремой о среднем.

Преимуществом подхода является доказательство интегральных теорем о среднем более простым способом по сравнению с традиционным. При этом доказательство обеих теорем проведено в единой манере с использованием элементов теории меры. Предложенный метод является более эффективным, чем общепринятый, и приводит к тому же результату при меньших ограничениях. Например, во второй теореме о среднем функция $g(x)$ не обязана быть дифференцируемой, а достаточно, чтобы она была только непрерывной.

Весьма плодотворным оказалось применение первой теоремы о среднем к некоторым физическим приложениям определенного интеграла. Например, определение центра тяжести тела более естественно вводить, используя теорему о среднем, чем это принято традиционным способом. Аналогично теорема Гульдина следует из формулы для площади поверхности тела вращения сразу после применения теоремы о среднем.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука,1970. – Т. 1. – 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позднял. – М. : Изд. ФМЛ, 1956. – Т. 1. – 472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М. : Наука, «ФМЛ», 1972. – Т. 2. – 795 с.
4. Мироненко Л.П. Интегральная форма теоремы Лагранжа и ее применение к определенному интегралу / Л.П. Мироненко, Н.А. Прокопенко // Сборник научно-методических работ. – 2009. – Вып. 6. – С. 119-126.
5. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позднял. – М. : Наука, «Физматлит», 1999. – 296 с.

Л.П. Міроненко, І.В. Петренко, О.А. Рубцова

Інтегральні теореми про середнє. Підхід, заснований на властивостях інтегральної міри

У статті розглянуто перша і друга інтегральні теореми про середнє та їх узагальнення, що відомо під назвою узагальнених теорем. Показано, що при певних властивостях підінтегральної функції теорема Лагранжа в інтегральній формі збігається з першою інтегральною теоремою про середнє. Доведення другої теореми про середнє ґрунтується на геометричних міркуваннях. Основним результатом є простота і витонченість доведення інтегральних теорем про середнє порівняно з традиційним способом, а у другій теоремі – навіть за менших обмежень.

Статья поступила в редакцию 05.07.2010.